Parallel Immersionのもとでの測地線の挙動について (部分多様体の微分幾何学)

AUTHOR(S):

間下, 克哉

数理解析研究所講究録
408巻 1980年 150-151

Parallel immersion のもとでの測地線の挙動について

筑波大 数学研究科 間下 克哉

$\iota: M \to \mathbb{E}^N$ を対称R空間Mのユークリッド空間内への，平行な第2基本形式を持つ等長はめこみとする。ここでMの階数が1であればM内の任意の測地線のιによる像は円になることが知られている。一般に次が成り立つ。

<u>定理 A.</u> $p \in M$ を固定する。Aをpを含むMの極大平坦全測地的部分多様体とする。$r = \dim A = \mathrm{rank}\, M$。Aのpにおける接空間$T_pA$の正規直交基$X_1, \cdots, X_r$で，$X_i$を初期ベクトルとするMの測地線$\gamma_i(t) = \exp tX_i$の$\iota$による像が円になるものが存在する。

$\mathbb{E}^r$の原点の近傍からAにおけるpの近傍への局所等長写像

$$\Phi: \mathbb{E}^r \longrightarrow A \; ; \; (t_1, \cdots, t_r) \longmapsto \exp\left(\textstyle\sum_{i=1}^r t_i X_i\right)$$

をとる。$\iota\circ\gamma_i$を含む2次元アファイン部分空間から$\mathbb{E}^2$への

等長写像φ_iを，$\iota\circ\gamma_i$ の中心のφ_iによる像が$\mathbb{E}^2$の原点となるようにとり，$f_i = \varphi_i\circ\iota\circ\gamma_i$ とおく。

<u>定理 B.</u>　$\iota\circ\Phi : \mathbb{E}^r \longrightarrow \mathbb{E}^N$ は$\mathbb{E}^r$の原点の近傍で，はめこみの積 $f_1\times\cdots\times f_r : \mathbb{E}^r \longrightarrow \mathbb{E}^{2r}$ と同値。

<u>系.</u>　Mの十分短い測地線分γのιによる像は，高々 $2r$ 次元のアファイン部分空間に含まれる。またM内には，いかなる$(2r-1)$次元アファイン部分空間にも含まれない測地線分が存在する。

$\iota : M \longrightarrow \mathbb{E}^N$ を対称空間Mのユークリッド空間内への等長はめこみとする。ιが定理A，定理Bの主張をみたせばιの第2基本形式は平行である。